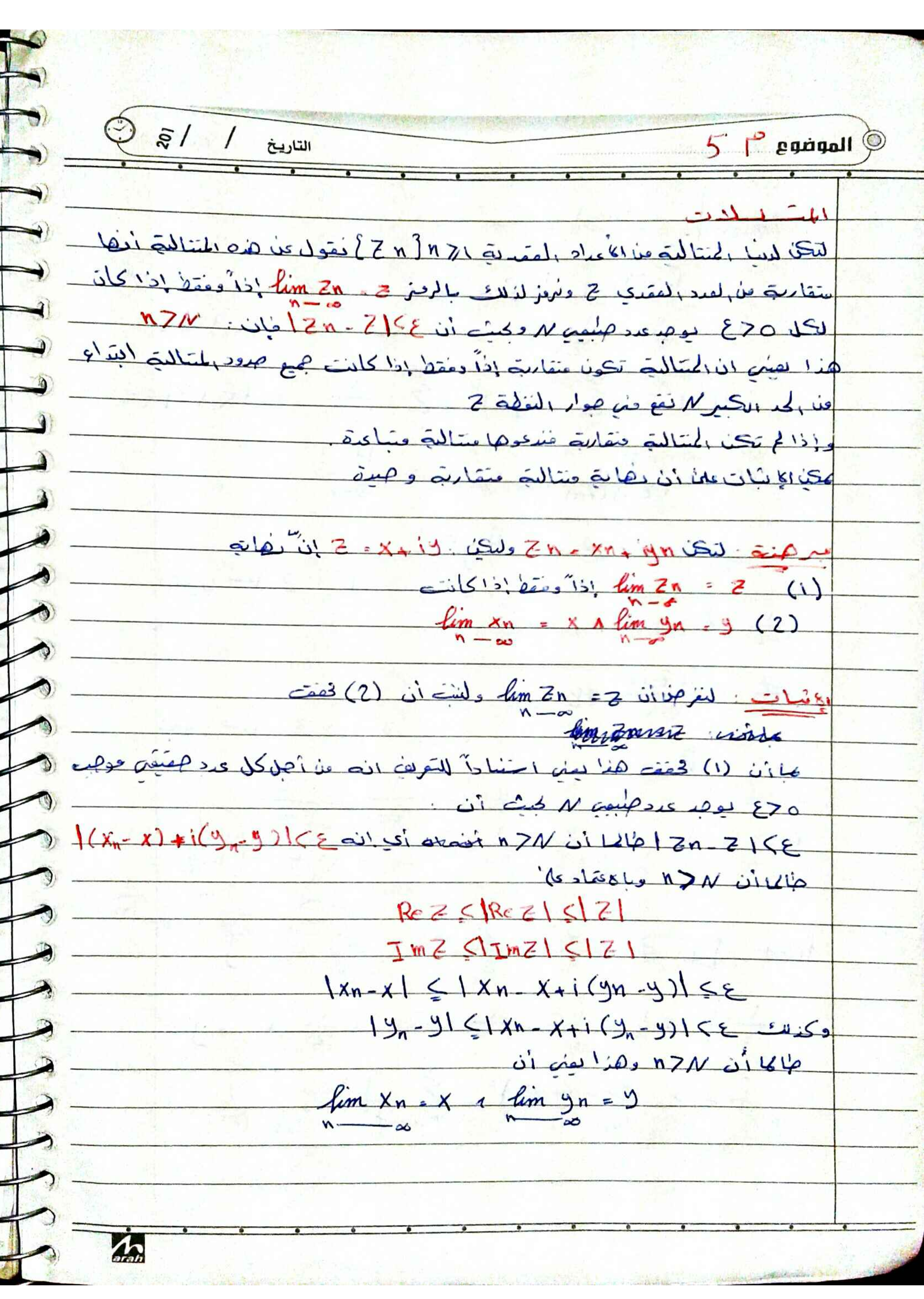


المتسلسلات

لتكن لدينا المتتالية من الأعداد العقدية $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ نقول عن هذه المتتالية أنها متقاربة من العدد العقدي Z ونرمز لذلك بالرمز $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$ إذاً وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N وبحيث أن $|Z_n - Z| < \varepsilon$ فإن: $n > N$

هذا يعني ان المتتالية تكون متقاربة إذاً وفقط إذا كانت جميع حدود المتتالية ابتداء من الحد الكبير N تقع ضمن جوار النقطة Z

وإذا لم تكن المتتالية متقاربة فندعوها متتالية متباعدة.

يمكن الإثبات على أن نهاية متتالية متقاربة وحيدة

مبرهنة: لتكن $Z_n = x_n + iy_n$ ولتكن $Z = x + iy$ إنّ نهاية

$\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$ (1) إذاً وفقط إذا كانت

$\lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y$ (2)

الإثبات: لنفرض أن $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$ ولنثبت أن (2) تحقق

بما أن (1) تحقق هذا يعني استناداً للتعريف انه من أجل كل عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N بحيث أن:

$|Z_n - Z| < \varepsilon$ طالما أن $n > N$ أي انه $|(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon$

طالما أن $n > N$ وبالاعتماد على

$$Re Z \leq |Re Z| \leq |Z|$$

$$Im Z \leq |Im Z| \leq |Z|$$

$$|x_n - x| \leq |x_n - x + i(y_n - y)| < \varepsilon$$

وكذلك $|y_n - y| \leq |x_n - x + i(y_n - y)| < \varepsilon$

طالما أن $n > N$ وهذا يعني أن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ , \ \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

العكس: لنفرض أن (2) محقق ولنثبت أن (1) محقق

بما أن (2) محقق يعني إنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد N_1, N_2 بحيث أن:

$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ فإن $n > N_1$

$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ فإن $n > N_2$

لنفرض أن N_0 هو أكبر العددين N_1, N_2 عندئذ: وبالتالي وبالاستفادة من المتراجحة المثلثية يكون

$$|x_n - x + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

طالما أن $n > N_0$

وهذا يعني أن $\lim_{n \to \infty} z_n = z$ وهو المطلوب

ملاحظة:

من خلال هذه المبرهنة نلاحظ بأن دراسة تقارب أو تباعد المتتاليات في الساحة العقدية يتم ردها إلى دراسة تقارب وتباعد المتتاليات في الساحة الحقيقية.

المتسلسلات:

نقول عن التعبير الآتي $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$

حيث $z_0, z_1, \dots z_n$ أعداد عقدية بأنه متسلسلة من الأعداد العقدية ونعبر عن ذلك اختصاراً بالرمز: (1) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$

لنشكل الآن متتالية المجاميع الآتية:

$$S_0 = z_0$$

$$S_1 = z_0 + z_1$$

$$S_2 = z_0 + z_1 + z_2$$

$$S_N = z_0 + z_1 + \dots z_n = \sum_{n=0}^{N} z_n$$

ندعو المتتالية S_N السابقة متتالية المجاميع الجزئية

وإذا كانت نهاية متتالية المجاميع الجزئية متقاربة ونهايتها S أي إنه $\lim_{N \to \infty} S_N = S$

عندئذ نقول عن المتسلسلة (1) انها متسلسلة متقاربة ومجموعها S أي أن

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

وبما أن نهاية متتالية هي نهاية وحيدة فإن مجموع متسلسلة هو أيضاً وحيد وإذا لم تكن

المتسلسلة متقاربة ندعوها بسلسلة متباعدة .

مبرهنة لتكن $S = X + iY$ و $Z_n = X_n + iY_n$

عندئذٍ $S = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ إذا وفقط إذا كان:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \ , \ Y = \sum_{n=0}^{\infty}$$

من خلال هذه المبرهنة يتم إرجاع دراسة تقارب أو تباعد المتسلسلات في الساحة العقدية إلى دراسة تقارب أو تباعد المتسلسلات في الساحة الحقيقية

ملاحظة إذا كانت $S = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ سلسلة متقاربة ومجموعها S هذا يعني حسب التعريف أن $\lim_{n \to \infty} S_n = S$

لنرمز لجميع حدود المتسلسلة المتقاربة المعطاة ابتداءً من الدليل $n+1$ بالرمز $R_N(Z)$ أي أن

$$R_N(Z) = \sum_{J=n+1}^{\infty} Z_J$$

والتي ندعوه متتالية البواقي أي أن .

$$|R_N(Z)| = |S_N - S|$$

من خلال هذه العلاقة الأخيرة نستنتج بأن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية البواقي تسعى إلى الصفر

مبرهنة (نشر تايلور) :

لتكن f تحليلية في داخلية القرص الدائري C_0 الذي مركزه النقطة Z_0 والذي نصف قطره r_0 عندئذٍ يكون للدالة f عند كل نقطة Z تقع في داخلية C_0 التمثيل الآتي

$$f(Z) = f(Z_0) + \frac{f'(Z_0)}{1!}(Z - Z_0) + \frac{f''(Z_0)}{2!}(Z - Z_0)^2 + \dots$$

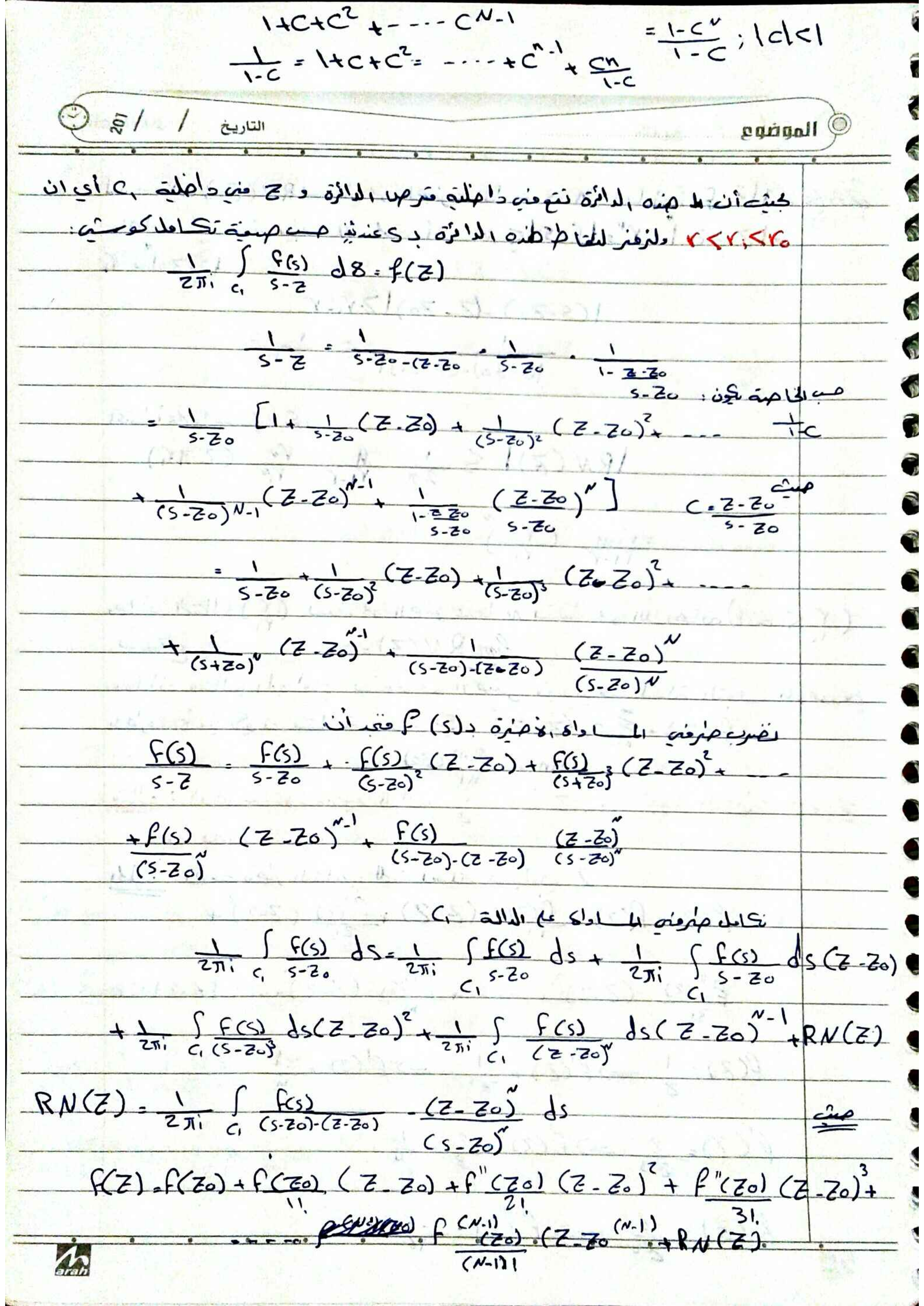
$$+ \frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}(Z - Z_0)^n \dots \quad (1) \ ; \ |Z - Z_0| < r_0$$

ملاحظة هذا النشر يدعى نشر تايلور للدالة f بجوار النقطة Z_0 حيث الدالة f تحليلية عند Z_0 وعند كل نقطة من نقاط هذا الجوار .

★ من هذه المبرهنة نستنتج بأن :

نصف قطر التقارب لمتسلسلة تايلور يساوي إلى المسافة بين مركز النشر وأقرب نقطة شاذة للدالة f عن مركز النشر .

الإثبات لتكن Z نقطة ما مثبتة في داخلية C_0 ولنرمز للمسافة بين Z, Z_0 بـ r أي $|Z - Z_0| = r$ حيث $r < r_0$ ولتكن C_1 دائرة مركزها Z_0 ونصف قطرها r_1



$1+c+c^2+\dots c^{N-1} = \frac{1-c^N}{1-c} ; |c|<1$

$\frac{1}{1-c} = 1+c+c^2+\dots+c^{n-1}+\frac{c^n}{1-c}$

بحيث أن ما ضمنه الدائرة تتضمن داخلية فترص الدائرة و Z ضمن داخلية c_1 أي ان $r<r_1<r_0$ ولنرمز للنقاط ضمنه الدائرة بـ s عندئذٍ حسب صيغة تكامل كوشي:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)}{s-Z}\,ds = f(Z)$$

$$\frac{1}{s-Z} = \frac{1}{s-Z_0-(Z-Z_0)} = \frac{1}{s-Z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{Z-Z_0}{s-Z_0}}$$

حسب الخاصية يكون:

$$= \frac{1}{s-Z_0}\left[1+\frac{1}{s-Z_0}(Z-Z_0)+\frac{1}{(s-Z_0)^2}(Z-Z_0)^2+\dots\right. \qquad \frac{1}{1-c}$$

$$\left.+\frac{1}{(s-Z_0)^{N-1}}(Z-Z_0)^{N-1}+\frac{1}{1-\frac{Z-Z_0}{s-Z_0}}\left(\frac{Z-Z_0}{s-Z_0}\right)^N\right]$$

حيث $c = \frac{Z-Z_0}{s-Z_0}$

$$= \frac{1}{s-Z_0}+\frac{1}{(s-Z_0)^2}(Z-Z_0)+\frac{1}{(s-Z_0)^3}(Z-Z_0)^2+\dots$$

$$+\frac{1}{(s+Z_0)^N}(Z-Z_0)^{N-1}+\frac{1}{(s-Z_0)-(Z-Z_0)}\,\frac{(Z-Z_0)^N}{(s-Z_0)^N}$$

نضرب طرفي المساواة الأخيرة بـ $f(s)$ فنجد أن

$$\frac{f(s)}{s-Z} = \frac{f(s)}{s-Z_0}+\frac{f(s)}{(s-Z_0)^2}(Z-Z_0)+\frac{f(s)}{(s+Z_0)^3}(Z-Z_0)^2+\dots$$

$$+\frac{f(s)}{(s-Z_0)^N}(Z-Z_0)^{N-1}+\frac{f(s)}{(s-Z_0)-(Z-Z_0)}\,\frac{(Z-Z_0)^N}{(s-Z_0)^N}$$

نكامل طرفي المساواة على الدالة c_1

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)}{s-Z_0}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)}{s-Z_0}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)}{s-Z_0}\,ds\,(Z-Z_0)$$

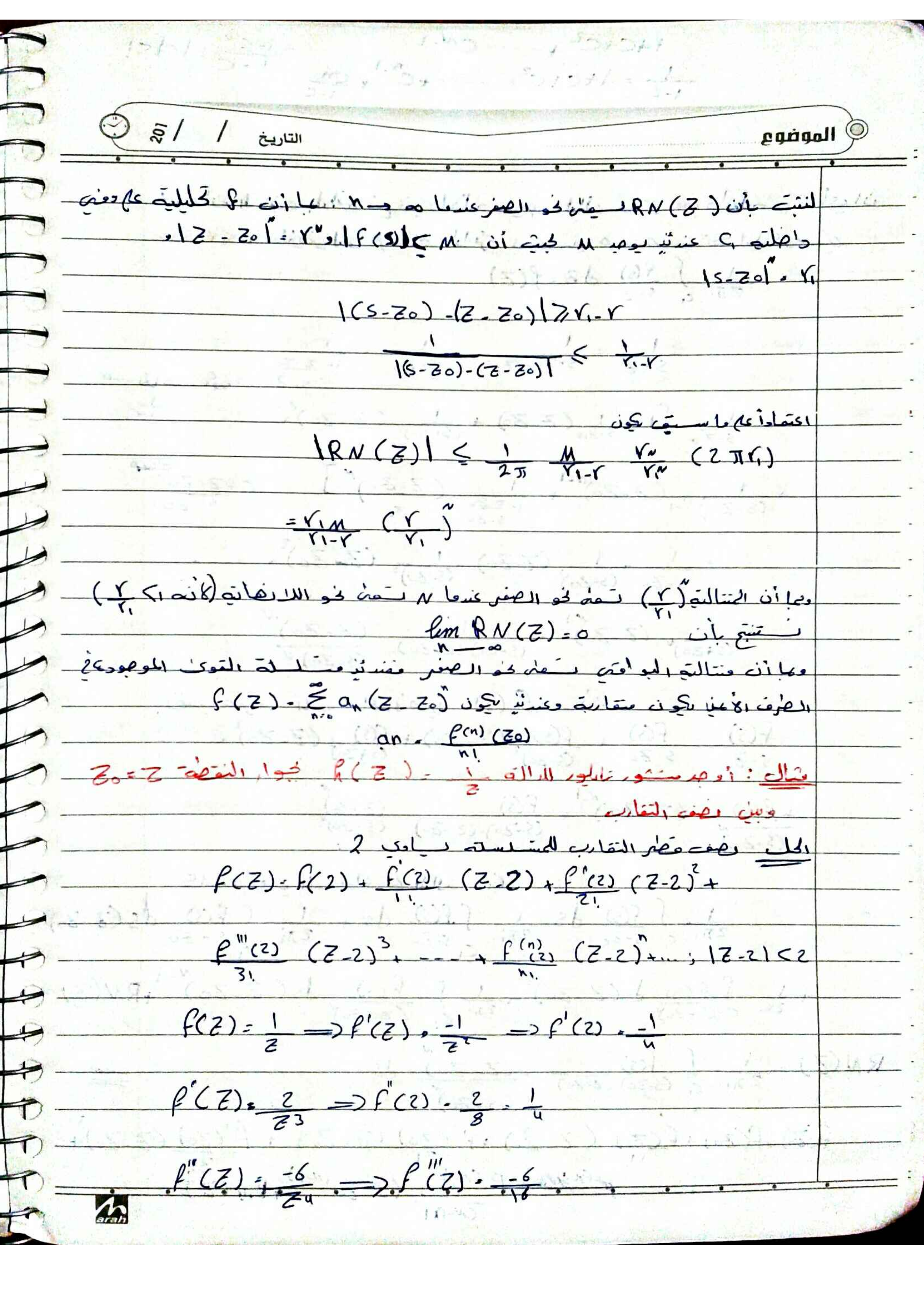
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)}{(s-Z_0)^3}\,ds\,(Z-Z_0)^2+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)}{(Z-Z_0)^N}\,ds\,(Z-Z_0)^{N-1}+R_N(Z)$$

$$R_N(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)}{(s-Z_0)-(Z-Z_0)}\cdot\frac{(Z-Z_0)^N}{(s-Z_0)^N}\,ds$$

حيث

$$f(Z) = f(Z_0)+\frac{f'(Z_0)}{1!}(Z-Z_0)+\frac{f''(Z_0)}{2!}(Z-Z_0)^2+\frac{f'''(Z_0)}{3!}(Z-Z_0)^3+$$

$$\dots+\frac{f^{(N-1)}(Z_0)}{(N-1)!}(Z-Z_0)^{(N-1)}+R_N(Z)$$



الموضوع   التاريخ / / 201

لنثبت بأن $R_N(Z)$ يؤول نحو الصفر عندما $n \to \infty$: بما أن f تحليلية على وفي داخل C_1 عندئذٍ يوجد M بحيث أن $|f(s)| \le M$ ، $|Z - Z_0| = r$ ، $|s - Z_0| = r_1$

$$|(s-z_0)-(z-z_0)| \ge r_1 - r$$

$$\frac{1}{|(s-z_0)-(z-z_0)|} \le \frac{1}{r_1-r}$$

اعتماداً على ما سبق يكون

$$|R_N(Z)| \le \frac{1}{2\pi}\,\frac{M}{r_1-r}\,\frac{r^n}{r_1^n}\,(2\pi r_1)$$

$$= \frac{r_1 M}{r_1-r}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

وبما أن المتتالية $\left(\frac{r}{r_1}\right)^n$ تسعى نحو الصفر عندما N تسعى نحو اللانهاية (لأنه $1 > \frac{r}{r_1}$)

نستنتج بأن $\lim_{n\to\infty} R_N(Z) = 0$

وبما أن متتالية البواقي تسعى نحو الصفر فعندئذٍ متسلسلة القوى الموجودة في الطرف الأيمن تكون متقاربة وعندئذٍ يكون $f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - Z_0)^n$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}$$

مثال: أوجد منشور تايلور للدالة $f(Z) = \frac{1}{Z}$ حول النقطة $Z_0 = 2$ وبين نصف التقارب

الحل: نصف قطر التقارب للمتسلسلة يساوي 2

$$f(Z) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(Z-2) + \frac{f''(2)}{2!}(Z-2)^2 +$$

$$\frac{f'''(2)}{3!}(Z-2)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(Z-2)^n + \cdots ; \quad |Z-2| < 2$$

$$f(Z) = \frac{1}{Z} \Rightarrow f'(Z) = \frac{-1}{Z^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-1}{4}$$

$$f''(Z) = \frac{2}{Z^3} \Rightarrow f''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f'''(Z) = \frac{-6}{Z^4} \Rightarrow f'''(2) = \frac{-6}{16}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-2) + \frac{1}{8}(z-2)^2 - \frac{1}{16}(z-2)^3 + \dots + (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}} \quad ; |z-2| < 2$$

ملاحظة: عندما $z_0 = 0$ عندئذ يصبح نشر تايلور بشكل:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

حيث $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

وندعو المنشور في الحالة السابقة نشر ماكلوران

مثال: أوجد نشر الدالة $f(z) = e^z$ في جوار $z = 0$

الحل: نصف قطر التقارب لانهائي أي النشر يتم في $|z| < \infty$

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots ; |z| < \infty$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

مثال: أوجد نشر الدالة $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ في جوار النقطة $z_0 = 1$

للإجابة عن هذا التساؤل يتم من خلال نشر لوران

مبرهنة لوران

لتكن f دالة تحليلية على النطاق الحلقي الواقع بين الدائرتين C_1 ، C_2 المتمركزتين في المركز والذي مركزهما هو النقطة z_0 عندئذ كل نقطة z من نقاط النطاق الحلقي $r_2 < |z - z_0| < r_1$ يكون للدالة f التمثيل الآتي $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$

$r_2 < |z - z_0| < r_1$

وحيث أن:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n-1}} dz \; ; n = 0, 1, 2 \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz \; ; n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{1}{1+C} = 1 - C + C^2 - C^3 + \cdots + (-1)^n C^n \ldots$$

$$\frac{1}{1-C} = 1 + C + C^2 + \cdots$$

ملاحظة: النشر السابق يدعى نشر لورانت للدالة $f(Z)$ بالنطاق الحلقي أي في النطاق الواقعة بين دائرتين متحدتي المركز $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z-Z_0)^n$

تدعى الجزء التحليلي لنشر لورانت

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(Z-Z_0)^n}$ تدعى الجزء الرئيسي لنشر لورانت

بعد حساب b_n على الطالب أن يتوضح الحذر

ملاحظة: عندما r_2 تسعى نحو الصفر يكون النشر السابق صحيح في هذه الحالة نقول أن نشر لورانت صحيح في القرص الدائري الموقوف عند مركز النشر

ملاحظة: إذا كانت الدالة f تحليلية في جميع النقاط التي تقع في داخلية الحز الدائرة C_1 وعند جميع النقاط التي تقع في داخلية C_2 وعلى منحنيا عند Z_0 يصبح المقدار $\frac{1}{(Z-Z_0)^{-n+1}}$ عبارة عن كثيرات

حدود ذلك لأن $-n+1 \leq 0$

أي أن $\frac{1}{(Z-Z_0)^{-n+1}}$ تصبح دالة تحليلية وجداء دالتين تحليليتين هو دالة تحليلية وعليه حسب مبرهنة كوشي جورسات للمناطق بسيطة الترابط بأن تكامل دالة تحليلية على كفاف مغلق وبسيط يساوي الصفر أي أن b_n مهما تكن $n = 1, 2, \ldots$ تصبح جميعها أصفار في هذه الحالة يتحول نشر لورانت السابق إلى نشر تايلور.